

ПРОСТЕЙШАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ДЕМОНСТРАЦИИ ОБРАЗОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СТРУКТУР ПРИ ИЗУЧЕНИИ ПРОЦЕССОВ САМООРГАНИЗАЦИИ

Аннотация

Предложена простейшая модель, иллюстрирующая образование пространственных структур на графике траектории движения частицы в ограниченной области пространства. Модель может быть легко реализована учащимися при использовании простейших компьютерных средств. Рассмотрены две разновидности модели – движение частицы в отсутствие внешнего поля и движение в однородном внешнем поле.

Ключевые слова: процессы самоорганизации, математическая модель, пространственные структуры, компьютерное моделирование.

Процессы самоорганизации широко распространены в природе, а их изучение является основной задачей *синергетики* – области междисциплинарных исследований, целью которых является выявление общих закономерностей в процессах образования, устойчивости и разрушения упорядоченных временных и пространственных структур в сложных неравновесных системах различной природы. Современное определение этого термина было дано Г. Хакеном в 1977 г. [7], и в настоящее время эта наука широко применяется для изучения как процессов, происходящих в природе, так и общественных процессов. Знакомство с элементами синергетики в той или иной степени входит во многие образовательные программы по направлениям физико-математического и естественнонаучного образования и, в частности, в программы учебных дисциплин, связанных с математическим моделированием. В качестве одного из последних выпущенных учебных пособий, можно привести пособие А.Ю. Лоскутова и А.С. Михайлова [4], содержащее достаточно полную библиографию по данной теме. Одной из характерных особенностей данной области исследований является необходимость одновремен-

ного применения как аналитических математических методов, так и достаточно объемных численных методов. Сочетание этих методов в настоящее время является характерной чертой задач, связанных с математическим моделированием [3].

Несмотря на достаточно большое число примеров образования пространственных структур в природе, при изучении соответствующих процессов чаще всего ограничиваются примерами, связанными с образованием стоячих волн в открытых системах. В качестве примера можно привести модель образования ячеек Бенара [6]. Соответствующий натурный эксперимент обычно приводится как традиционный пример образования пространственных структур. На самом деле образование пространственных структур характерно не только для волновых процессов. Достаточно вспомнить придуманную Дж. Конвеем игру «Жизнь», в которой из бесструктурного набора клеток, подчиняющихся определенным правилам эволюции, возникают упорядоченные пространственные структуры (см., например, [1]). В данной работе мы приведем простейшую модель образования пространственных структур при временной эволюции системы, которая, с одной стороны, является достаточно наглядной, а с другой стороны, доступна

© Денисевич А.А., Ляпцев А.В., 2014

для реализации на компьютере даже учащимся школы, изучающим основы программирования.

Исходной моделью является модель бильярда, в которой материальная точка движется по прямолинейным траекториям с постоянной скоростью, упруго отражаясь от стенок. Более сложные модели бильярдов, в которых область пространства, ограничивающая движение частицы, имеет сложный вид, традиционно исследуются в задачах нелинейной динамики (см., например, [2]). Как правило, предметом исследования является существование и устойчивость периодических траекторий. Для рассматриваемого нами простейшего прямоугольного бильярда нахождение периодических траекторий является школьной задачей. Суть решения легко понять, рассмотрев сетку соответствующих прямоугольников (рис. 1).

Вместо реального движения частицы после отражения от стенки, можно представить, что частица, не изменяя скорости, продолжает движение в соседней клетке. Таким образом, вместо движения по замкнутой ломаной линии $ABCDEFA$, можно рассматривать движение по прямой линии, состоящей из соответствующих отрезков $ABC'D'E'F'A'$. Точка A' на сетке эквивалентна точке A . Несложно увидеть, что если изначально частица находилась у горизонтальной прямой, то для завершения цикла она должна четное число раз отразиться от вертикальной стенки и нечетное число раз от горизонтальной стенки. Соответственно, прямая, идущая в эквивалентную точку, должна нечетное число раз пересечь горизонтальные линии и четное число раз – вертикальные линии. Отсюда следует, что эквивалентная точка должна быть сдвинута относительно исходной точки на величину $2ma$ по горизонтали и $2nb$ по вертикали, где a и b – размеры бильярда, m и n – целые числа. Определяющий наклон прямой угол φ соответственно задается выражением:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{nb}{ma}.$$

Из этих рассуждений следует, что траектория является замкнутой, то есть движение частицы периодически, если число

$$r = \frac{a}{b} \operatorname{tg}\varphi$$

является рациональным. В случае иррационального числа r , например при $a = b$ и $\varphi = 30^\circ$, траектория будет незамкнутой, а движение – не периодичным. Здесь следует отметить, что иррациональным числам соответствуют лишь идеализированные объекты, любая реальная величина определяется с некоторой погрешностью, а следовательно, может быть выражена рациональным числом. Точно так же при каких-либо численных расчетах все получаемые результаты выражаются рациональными числами. Тем не менее, траектории для близких чисел r могут существенно различаться по виду. Например, при $r = 1$ траектория будет представлять собой параллелограмм, а для близкого числа $99/100$ траектория будет состоять примерно из 398 линий, и то, что эта траектория является замкнутой, визуально определить трудно. Как мы далее покажем, самоорганизация может проявляться в эволюции траектории, так что конечным этапом эволюции является траектория, состоящая из небольшого числа линий.

Чтобы привести в модель свойства, способствующие самоорганизации, акцентируем внимание на двух основных свойствах самоорганизующихся систем. Эти системы должны быть *открытыми*, то есть подвергающимися некоторому внешнему воздействию, и эти системы должны быть *диссипативными*. Не приводя строгого определения диссипативности (см. выше процитированные книги [4, 7]), отметим, что для рассматриваемой здесь механической системы

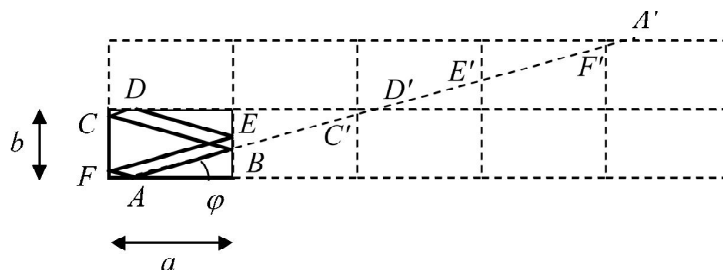


Рис. 1

это означает присутствие процессов, преобразующих энергию упорядоченного движения (механическую энергию) в энергию хаотического движения (внутреннюю тепловую энергию). Из курса физики известно, что такие процессы происходят при наличии сил трения. В соответствии с этим, дополним модель силами трения, которые будем считать пропорциональными скорости (силы вязкого трения):

$$\mathbf{F} = -C\mathbf{v}. \quad (1)$$

Знак минус в выражении (1) соответствует тому, что векторы силы и скорости направлены противоположно.

Очевидно, что наличие силы трения, в конце концов, приведет к остановке частицы, если не оказывать на нее внешнего воздействия. Шары на бильярдном столе останавливаются, если не воздействовать на них кием. Чтобы ввести внешнее воздействие, предположим, что стенка подталкивает столкнувшийся с ней шар, сообщая ему некоторую энергию. Подобная модель не лишена физического смысла: при столкновении с теплой стенкой молекулы газа приобретают дополнительную энергию, которую потом передают другим молекулам при столкновениях. Именно так происходит повышение температуры воздуха в помещении при обогреве какими-либо отопительными приборами. Соответственно, будем называть нашу модель «бильярд с теплыми стенками».

Сделаем также некоторые дополнительные предположения относительно внешнего воздействия. Во-первых, будем считать, что при каждом столкновении восстанавливается первоначальная (по модулю) скорость, то есть скорость, которую сообщили частице в начале движения. Во-вторых, будем считать, что при столкновениях изменяется лишь составляющая скорости, перпендикулярная поверхности, с которой сталкивается частица (нормальная составляющая скорости). Если оси X и Y направить соответственно по горизонтали и вертикали (естественно, имеется в виду вертикаль на рисунке), то при столкновении с горизонтальной стенкой проекции скорости изменятся по закону:

$$\begin{aligned} v'_x &= v_x, \\ v'_y &= -\text{sign}(v_y)\sqrt{v_0^2 - v_x^2} \end{aligned} \quad (2)$$

(v_0 – начальная скорость молекулы, штрихами обозначены проекции скорости после столкновения, $\text{sign}(x)$ – функция, определяющая знак числа x), а при столкновении с вертикальной стенкой – по закону:

$$\begin{aligned} v'_x &= -\text{sign}(v_x)\sqrt{v_0^2 - v_y^2}, \\ v'_y &= v_y. \end{aligned} \quad (3)$$

Уравнение, описывающее движение частицы между столкновениями определяется вторым законом Ньютона:

$$m\mathbf{a} = -C\mathbf{v},$$

откуда следует дифференциальное уравнение для скорости:

$$\dot{\mathbf{v}} = -k\mathbf{v}, \quad (4)$$

где $k = C/m$, а в левой части уравнения (1) стоит производная от скорости по времени. Решение уравнения (4) имеет вид:

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 \exp(-k(t - t_0)), \quad (5)$$

где \mathbf{v}_0 – скорость в некоторый начальный момент времени t_0 . Векторное равенство (5) эквивалентно двум скалярным равенствам для проекций скоростей:

$$\begin{aligned} v_x(t) &= v_{0x} \exp(-k(t - t_0)), \\ v_y(t) &= v_{0y} \exp(-k(t - t_0)). \end{aligned} \quad (6)$$

Зависимость координат от времени получается при интегрировании выражений (6):

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + v_{0x}(1 - \exp(-k(t - t_0)))/k, \\ y(t) &= y_0 + v_{0y}(1 - \exp(-k(t - t_0)))/k. \end{aligned} \quad (7)$$

где x_0 и y_0 – координаты частицы в момент времени t_0 .

Выражения (2), (3) и (7) позволяют составить достаточно простой алгоритм для построения траектории. Пусть известны момент времени, координаты и проекции скоростей на i -м шаге: $\{t^{(i)}, x^{(i)}, y^{(i)}, v_{0x}^{(i)}, v_{0y}^{(i)}\}$. По знаку проекций скоростей определяем координаты стенок, с которыми возможно очередное столкновение (обозначим их через x_f и y_f):

$$x_f = \begin{cases} a/2, v_{0x}^{(i)} > 0 \\ -a/2, v_{0x}^{(i)} < 0 \end{cases}, \quad (8)$$

$$y_f = \begin{cases} b/2, v_{0y}^{(i)} > 0 \\ -b/2, v_{0y}^{(i)} < 0 \end{cases}.$$

Моменты возможного столкновения со стенками t_x и t_y определяются из уравнений:

$$x_f = x(t_x), \quad y_f = y(t_x), \quad (9)$$

где правые части уравнений задаются выражениями (7). Решения уравнений (9) несложно получить:

$$t_x = t^{(i)} - \frac{1}{k} \ln \left(1 - \frac{x_f - x^{(i)}}{v_{0x}^{(i)}} k \right), \quad (10)$$

$$t_y = t^{(i)} - \frac{1}{k} \ln \left(1 - \frac{y_f - y^{(i)}}{v_{0y}^{(i)}} k \right).$$

Момент столкновения на $i + 1$ шаге определяется как минимальное значение из t_x и t_y . После этого при помощи выражений (2), (3) и (7) определяется совокупность переменных на $i + 1$ шаге $\{t^{(i+1)}, x^{(i+1)}, y^{(i+1)}, v_{0x}^{(i+1)}, v_{0y}^{(i+1)}\}$. Значения переменных на 1-м шаге нужно, естественно, задавать. Траектория строится как отрезки прямых, соединяющих точки с координатами $(x^{(i)}, y^{(i)})$ и $(x^{(i+1)}, y^{(i+1)})$. При желании можно построить зависимость координат и скоростей от времени, используя для промежуточных моментов времени выражения (6) и (7). Отметим, наконец, что при расчете удобно провести масштабирование, приняв, например, за единицу длины значение $a/2$, а за единицу скорости – значение v_0 . Единицей времени в этом случае будет половина времени пролета между вертикальными стенками

при единичной скорости, направленной горизонтально.

Результаты расчетов изображены на рис. 2. Начальные данные: частица находится в середине нижней стороны бильярда и начальная скорость направлена под углом 43° к горизонту, параметр диссипации $k = 0,01$, соотношение между сторонами бильярда выбрано 2 : 1. Рис. 2 а соответствует траектории движения на временном интервале $t \in [0, 100]$, рис. 2 б – на интервале $t \in [100, 200]$ и рис. 2 в – на интервале $t \in [900, 1000]$. Как видно из рисунков, уже на втором интервале устанавливается практически одинаковый наклон отрезков траектории. За время порядка $10k^{-1}$ происходит визуально наблюдаемое установление структур (рис. 2 в).

Качественно причину упорядочения можно объяснить следующим образом. При каждом столкновении со стенкой уменьшается угол между вектором скорости в момент столкновения и нормалью к поверхности. Таким образом, при столкновении с горизонтальной стенкой увеличивается $|v_y|$ и уменьшается $|v_x|$, так что после отражения траектория идет круче по отношению к горизонту. Напротив, после отражения от вертикальной стенки траектория становится более полой. Эти две тенденции противоположны, и в конечном итоге устанавливается определенное равновесие. Более детальное обсуждение механизма, обеспечивающего стремление к достаточно простому аттрактору, требует отдельного рассмотрения и не является целью данной работы.

Аналогичные картины возникают и при других значениях начальных условий, хотя конечные структуры получаются различными. При этом даже при одних и тех же на-

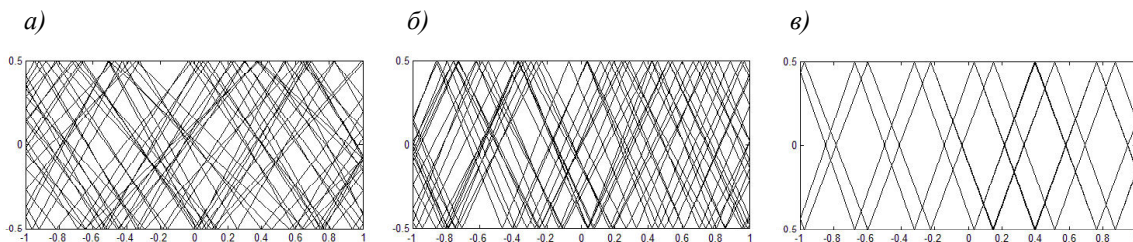


Рис. 2

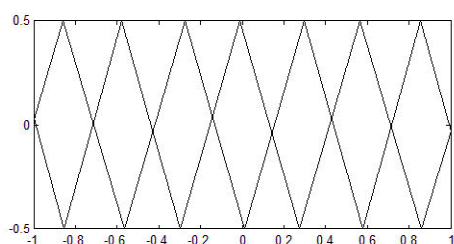


Рис. 3

чальных условиях, в силу погрешностей в вычислениях, могут возникать различные конечные структуры. На рис. 3 приведена установившаяся структура траектории при тех же начальных условиях, что и на рис. 2.

Заметим также, что увеличение параметра k приводит к более быстрому установлению структур, однако их разнообразие становится меньше.

Отметим характерные особенности данной модели: ограниченность движения частицы, наличие большого числа периодических решений, наличие диссипации, подкачка энергии в процессе движения. Можно предположить, что и при другом характере движения, например при движении с постоянным ускорением, будет наблюдаться свойство установления периодического движения, подобного тому, что имеет место при движении свободной частицы, если будут сохраняться вышеперечисленные особенности системы.

Рассмотрим более сложную модель, в которой частица движется в однородном поле. Будем считать, что таким полем является поле тяжести, характеризуемое, как обычно, ускорением свободного падения g . Будем, как и в предыдущей задаче, рассматривать движение частицы в одной плоскости. Для ограничения движения частицы в таком случае достаточно трех плоскостей – двух стенок и пола, так что обе стен-

ки перпендикулярны плоскости движения частицы.

При упругом столкновении со стенками и полом и в отсутствие диссипации движение частицы между столкновениями происходит по траекториям, являющимся кусками параболы. Подобное движение можно представить, например, как движение мяча в небольшой комнате. Как и в предыдущей модели, для наглядного представления траектории можно «продолжить» движение частицы за стенку, считая, что она пролетает в «соседнюю ячейку». При таком рассмотрении частица будет двигаться, перелетая из одной ячейки в другую и упруго отражаясь от пола. Несложно понять, что если дальность полета (от одного столкновения с полом до другого) будет выражаться рациональным числом от длины ячейки, то после нескольких отскоков от пола частица попадет в эквивалентную точку, а движение в исходной модели (с отражениями от стенок) будет периодическим. В качестве примера на рис. 4 а приведена траектория периодического движения с двумя отражениями от стенок на периоде. Это движение можно представить как движение в двух ячейках, так что в конце движения во второй ячейке частица попадает в точку, эквивалентную той, в которой начинается движение в первой ячейке (рис. 4 б).

Следуя предыдущей модели, добавим диссипацию энергии и подкачку энергии при столкновении частицы со стенками. Как и ранее, будем считать, что действующая на частицу сила трения пропорциональна скорости. Уравнение движения в векторной форме можно привести к виду:

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{g} - k\mathbf{v}, \quad (11)$$

где k , как и прежде, параметр, определяю-

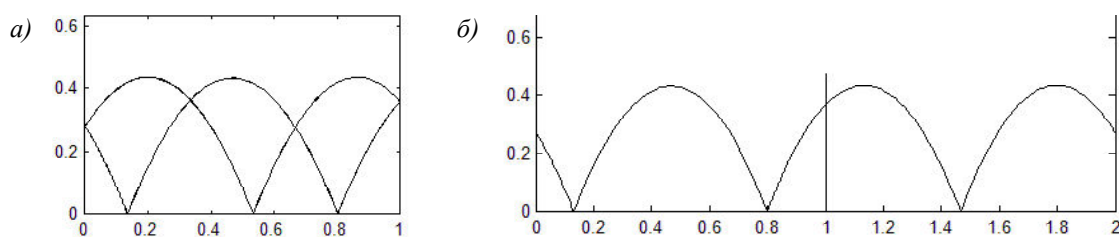


Рис. 4

щий величину диссипации энергии. Проектируя уравнение (11) на оси (ось Y , как обычно в таких задачах, направлена вверх), получим два скалярных дифференциальных уравнения.

$$\begin{aligned} \dot{v}_x &= -kv_x, \\ \dot{v}_y &= -kv_y - g. \end{aligned} \quad (12)$$

Решения уравнений (12) получаются стандартным методом и имеют вид:

$$\begin{aligned} v_x(t) &= v_{0x} \exp(-k(t-t_0)), \\ v_y(t) &= v_{0y} \exp(-k(t-t_0)) - \\ &\quad - g(1 - \exp(-k(t-t_0)))/k. \end{aligned} \quad (13)$$

где, как и прежде, v_{0x} и v_{0y} – проекции скоростей в некоторый начальный момент времени t_0 . Зависимость координат от времени находится простым интегрированием по времени уравнений (13):

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + v_{0x}(1 - \exp(-k(t-t_0)))/k, \\ y(t) &= y_0 + (v_{0y} + g/k)(1 - \exp(-k(t-t_0)))/k - \\ &\quad - g(t-t_0)/k. \end{aligned} \quad (14)$$

Учтем теперь подкачку энергии при столкновении со стенками и полом. В отличие от предыдущей модели, будем учитывать потенциальную энергию поля тяжести и будем считать, что при каждом столкновении восстанавливается не первоначальное значение скорости, а первоначальное значение энергии. Без потери общности можно считать, что исследование движения частицы начинается с момента, когда она находится на уровне пола. В этом случае начальное значение энергии характеризуется некоторым начальным значением скорости, которое мы обозначим через V . Тогда для изменения проекций скорости при отскоке от пола и стенки можно написать соотношения:

$$\begin{aligned} v'_x &= v_x, \\ v'_y &= \sqrt{V^2 - v_x^2}, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} v'_x &= -\text{sign}(v_x) \sqrt{V^2 - 2gy - v_x^2}, \\ v'_y &= v_y. \end{aligned} \quad (16)$$

где $y = 0$ соответствует уровню пола.

Выражений (13)–(15) достаточно для проведения расчетов. Поскольку исходная модель содержит 4 размерных параметра g , V , k и расстояние между стенками L_0 , це-

лесообразно выбором безразмерных переменных времени и длины сократить задаваемое при расчете число параметров. Будем считать, что длину мы измеряем в единицах длины ячейки, то есть положим $L_0 = 1$. Единицу времени определим, положив $V = 1$. Наконец, вместо параметра g , который после выбора безразмерных единиц измерения расстояния и времени становится безразмерным, удобно взять параметр $1/g$. Физический смысл этого параметра легко понять, если вспомнить выражение для максимальной дальности полета тела, брошенного под углом к горизонту:

$$L = \frac{V^2}{g} = \frac{1}{g}.$$

В результате в расчете фигурируют лишь два безразмерных параметра L и k .

Заметим, что в отличие от предыдущей модели, для которой все вычисления проводятся аналитически, в данной модели момент времени очередного столкновения с полом t определяется в результате решения трансцендентного уравнения:

$$1 = \frac{y_0 + (v_{0y} + 1/(Lk))(1 - \exp(-k(t-t_0)))/k}{(t-t_0)/(Lk)}. \quad (17)$$

Решение подобных уравнений является одной из стандартных задач при обучении численным методам и может быть получено любым из стандартных методов (деление отрезка пополам, метод хорд, метод касательных и т. д.) Заметим, что стандартные процедуры, реализованные в вычислительных средах, например в среде Matlab, требуют задания интервалов, на концах которого функция, приравненная к нулю, принимает различные по знаку значения. В данном случае соответствующие значения времени t могут быть легко получены. Действительно, положительное значение функции, стоящей в правой части равенства (17) соответствует значению t_1 , при котором проекция скорости v_{0y} обращается в ноль. Это значение находится при решении второго из уравнений (13):

$$t_1 = t_0 + \frac{1}{k} \ln(1 + Lkv_{0y}). \quad (18)$$

То, что при $v_{0y} < 0$ получается $t_1 < t_0$ не

имеет значения. Для нахождения момента времени t_2 , при котором координата y становится отрицательной, в выражении (17) можно положить $\exp(-k(t-t_0)) = 0$, после чего получим:

$$t_2 = t_0 + y_0 L k + v_{0y} L + 1/k. \quad (19)$$

Таким образом, алгоритм расчета траектории для данной модели может быть следующим.

1. На начальном этапе определяем начальную координату y_0 и угол, под которым направлена скорость, после чего вычисляем v_{0x} и v_{0y} .

2. При помощи численного решения уравнения (17) с использованием выражений (18) и (19) определяем момент столкновения частицы с полом t_s .

3. Если в момент времени t_s частица вылетела за пределы ячейки, то есть $x(t_s) < 0$ или $x(t_s) > 1$, вычисляем момент столкновения частицы со стенкой. Соответствующие формулы аналогичны формулам (10). Далее считаем t_s равным этому вычисленному значению.

4. При помощи формул (14) определяем координаты частицы в момент столкновения и при помощи формул (13) проекции скоростей перед моментом столкновения.

5. При помощи формул (15) или (16) определяем скорости частицы сразу после столкновения, после чего начинаем следующий цикл.

6. Координаты и проекции скоростей между столкновениями рассчитываем при помощи выражений (14) и (13).

Результаты одного из расчетов приведены на рис. 5. Расчет проводился при следу-

ющих значениях параметров: $L = 1$, $k = 0,01$, при начальном значении координаты $y_0 = 0,5$ и начальном значении угла между скоростью и горизонтом $\alpha = 45^\circ$.

На рис. 5 а) приведены траектории на интервале $t \in [0, 100]$, на рис. 5 б) – траектории на интервале $t \in [200, 300]$ и на рис. 5 в) – траектории на интервале $t \in [2000, 2100]$. Как видно из рисунков, за время порядка 300 устанавливаются параболы, почти подобные окончательным (картина траекторий при $t > 2000$ остается практически неизменной).

Картина траекторий, устанавливающаяся на промежутке времени порядка $10k^{-1}$, отличается большим разнообразием и зависит как от начальных условий, так и от «управляющего параметра» L . Как и в предыдущей модели, иногда вследствие того, что вычисления выполняются с некоторой ограниченной точностью, при одних и тех же параметрах и начальных условиях можно получить различные картины установившихся траекторий. Поскольку в данной модели, в отличие от предыдущей, появляется управляющий параметр L , при численном эксперименте можно наблюдать одну из характерных особенностей, проявляющихся в задачах нелинейной динамики – бифуркацию решений. Для наблюдения бифуркации можно при некотором параметре L дождаться установления картины траекторий, а затем продолжить расчет, незначительно изменив параметр L . Дождавшись установления картины траекторий, можно повторить изменение L , и т. д. Вначале при малом изменении этого параметра после установления будет наблюдаться прежняя картина траекторий. Однако, если терпеливо продолжать подобную процедуру, после очередно-

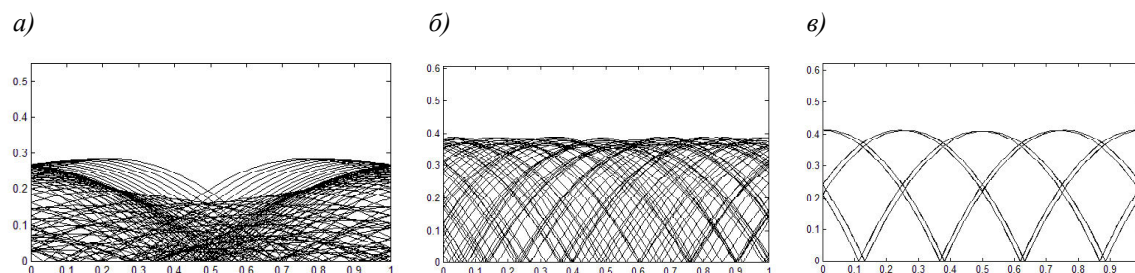


Рис. 5

го изменения L можно наблюдать «срыв» – устанавливается иная картина траекторий. Подобные скачкообразные изменения характера установившихся решений при изменении управляющего параметра в численных экспериментах характерны, например, при воздействии на систему, совершающую одномерное движение, внешнего периодического поля [5].

Предлагаемая модель может быть без труда обобщена на другие формы бильярда. Достаточно очевидно, что для бильярда в виде круга при любом начальном значении скорости установится траектория, проходящая по одному из диаметров. Остается открытым вопрос, что будет происходить для других форм бильярда. В частности, возможен ли режим хаоса, который не наблюдается для рассмотренных выше моделей.

Литература

1. Клумова И.Н. Игра «Жизнь» // Квант, 1974. № 9. С. 26–30.
2. Козлов В.В., Трещев Д.В. Биллиарды. Генетическое введение в динамику систем с ударами. М., 1991.
3. Кондратьев А.С., Ляцев А.В. Математическое моделирование: аналитические и вычислительные методы // Компьютерные инструменты в образовании, 2007. № 5. С. 20–24.
4. Лоскутов А.Ю., Михайлов А.С. Основы теории сложных систем. М.–Ижевск, 2007.
5. Ляцев А.В. «Квантование» в задачах нелинейной динамики. Численный эксперимент и интерпретация // Известия Российского государственного университета им. А.И. Герцена, 2012. № 147. С. 161–175.
6. Попов С.Е. Методическая система подготовки учителя в области вычислительной физики. Монография. Нижний Тагил: НТГСПА, 2005.
7. Хакен Г. Синергетика. М.: Мир, 1980.

THE SIMPLE MODEL FOR DEMONSTRATION OF SPATIAL STRUCTURES FORMATION ON STUDYING THE PROCESSES OF SELF-ORGANIZATION

Abstract

The simple model for illustration of spatial structures formation on the chart trajectory of the motion of particles in a bounded region of space is proposed. The model can be easily implemented by students using the simple computer tools. Two types of model are considered – motion of particle in the absence of an external field and motion in the homogeneous external field.

Keywords: processes of self-organization, mathematical model, spatial structures, computational simulation.

*Ляцев Александр Викторович,
доктор физико-математических
наук, профессор, заведующий
кафедрой методики обучения физике
РГПУ им. А.И.Герцена,
irt_eno@mail.ru,*

*Денисевич Александра Алексеевна,
аспирант РГПУ им. А.И.Герцена,
Sashamy_one@mail.ru.*



Наши авторы, 2014.

Our authors, 2014.